КОМПЛЕКСНЫЕ ПРОСТРАНСТВА В ГИДРОДИНАМИКЕ: КОМПЛЕКСНЫЕ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА

А.Н.Панченков

Нижегородский государственный технический университет
Россия, 603000, г. Нижний Новгород, ул. М. Горького, д.148, кв. 26.
e–mail: entropyworld@mail.ru

I. Проблема комплексных пространств в гидродинамике привлекла внимание исследователей в связи с возникновением энтропийной концептуальной модели, методологии и инструментальных средств описания Природы и окружающей нас Действительности. Эта проблема тесно связана с аналитической гидродинамикой и теорией турбулентности.

Аналитическая гидродинамика и ее важный раздел – теория уравнений Навье – Стокса в настоящее время привлекает внимание многочисленных исследователей. В теории уравнений Навье – Стокса, начиная с работы Leray [1] основные исследования были посвящены проблеме "слабых" (турбулентных) решений. Здесь следует указать работы [2–6]. Несмотря на их многочисленность, наши знания структуры и свойств решений уравнений Навье – Стокса достаточно скромны. В связи с этим положением дел стала актуальной задача привлечения в аналитическую гидродинамику новых идей, концепций, методологий и инструментальных средств.

Новая концепция, методология и инструментальные средства исследования сплошных сред разработаны А.Н.Панченковым в книгах серии "Энтропия" [7–10].

Одной из характерных особенностей этих книг является то, что в большинстве проблем базовые геометрические объекты (фазовые пространства, конфигурационные пространства, энтропийные многообразия и др.) являются комплексными. Более того, предмет книги "Инерция" – теория инерции - реализована над полем комплексных чисел. Энтропийная механика в книге "Энтропийная механика" определена А.Н.Панченковым, как механика потоков на энтропийных многообразиях комплексных конфигурационных пространств и полей в комплексных конфигурационных пространствах.

При этом определяющим фактором, приводящим к целесообразности и необходимости комплексификации, является существование в виртуальной сплошной среде ротора. Напомню, что уравнения Навье – Стокса были введены в гидродинамику для описания ламинарных потоков вязкой несжимаемой жидкости; при этом вопрос об обоснованности и достоверности их применения до сих пор остается открытым. Сомнения в пригодности вещественных уравнений Навье – Стокса для описания турбулентных потоков высказывали несколько исследователей (см., например, [3]). Но этот вопрос приобрел особую актуальность в последние годы, в связи с активизацией работ по теории этих уравнений [4], [6], [http://claymath.org]. Конкретные материалы и факты, устанавливающие необходимость перехода в проблеме турбулентности к комплексным уравнениям Навье – Стокса, содержатся в книге [8]. В разделе "Турбулентность" книги "Энтропия –2: Хаотическая механика", автор принял отличную от классической гипотезу возникновения турбулентности. В проблеме турбулентности, обычно, возникновение турбулентности связывают с потерей устойчивости ламинарного движения. Я принял другую гипотезу, никак не связанную с потерей устойчивости ламинарного движения. Ламинарное движение не может существовать бесконечно долго; рано или поздно наступает момент времени, когда ламинарное движение прекращает существовать. Расположенная на временной шкале точка прекращения существования (разрушения) ламинарного потока одновременно является точкой возникновения турбулентного потока.

В этой гипотезе причина турбулентности кроется в разрушении ламинарного потока. Разрушение ламинарного потока, как некоторой структуры, прямо не связано с устойчивостью движения; речь идет не о потере устойчивости, а о разрушении одной структуры (ламинарного потока) и о возникновении вслед за разрушением другой структуры (турбулентного потока). Разрушение и возникновение происходит в хаосе, что и определяет ключевую роль хаотической механики.

Развитие эффективной теории турбулентности, на основе гипотезы разрушения ламинарного потока, естественным образом требует введения комплексных базовых геометрических объектов и комплексных уравнений Навье – Стокса, что и сделано мною в книге [8]. В ней установлено, что в проблеме турбулентности комплексное фазовое пространство является естественной средой обитания турбулентности.

II. Лежащий в основе энтропийного анализа гидродинамики постулат имеет формулировку: *концептуальная модель гидродинамики является конкретизацией энтропийной концептуальной модели* [11].

Базовым геометрическим объектом теории энтропии является фазовое пространство – гладкое многообразие с локальными координатами q и p:

$$\Omega = \left\{ q\,,\, p \mid \Omega = \Omega_q \times \Omega_p;\, \Omega_q \subset R^3;\, \Omega_p \subset R_3;\, \Omega \subset R^3 \oplus R_3 \right\}.$$

Здесь:

q – обобщённая координата.

p – импульс.

R^3– трёхмерное вещественное евклидово пространство.

R_3 – сопряжённое трёхмерное вещественное евклидово пространство

Фазовое пространство формирует:

1. Конфигурационное пространство

$$\Omega_q = \left\{ q \mid \Omega_q \subset R^3 \right\}.$$

2. Пространство импульса

$$\Omega_p = \left\{ p \mid \Omega_p \subset R_3 \right\}.$$

Общая энтропия имеет двойственное представление:

$$H_f = H_q + H_p\,;\ \left\{ q\,,\, p \right\} \in \Omega, \tag{1}$$

H_q – структурная энтропия,

H_p – энтропия импульса.

На состояниях среды, расположенной в фазовом пространстве, поддерживается глобальная симметрия:

$$H_f = const. \tag{2}$$

Эта симметрия является следствием применения принципа максимума энтропии к больцмановскому представлению энтропии [7]

$$H_f \triangleq -\int_{\Omega} \rho \ln\rho \, d\Omega\ ,\ \left\{ q\,,\, p \right\} \in \Omega. \tag{3}$$

В этом исходном представлении энтропии ρ – плотность виртуальной сплошной среды.

Первое сужение фазового пространства – гладкое многообразие, называемое энтропийным многообразием - организуется с помощью симметрии (2)

$$Э = \{q, p \mid Э \subset \Omega, H_f\}. \tag{4}$$

Энтропийное многообразие имеет структуру прямого произведения:

$$Э = Э_q \times Э_p : Э_q = \{q \mid Э_q \subset Э, H_q\}; Э_p = \{p \mid Э_p \subset Э, H_p\}. \tag{5}$$

Здесь:

$Э_q$ – энтропийное многообразие конфигурационного пространства,

$Э_p$ – энтропийное многообразие пространства импульса.

Соленоидальное многообразие получается путём задания на энтропийном многообразии дивергенции

$$\sigma = \mathrm{div}A;\ A = \left[\frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t}\right];$$
$$\mathcal{M} = \{q, p \mid \mathcal{M} \subset Э, \sigma = \mathrm{div}A\}. \tag{6}$$

На соленоидальном многообразии симметрия (2) поддерживается уравнением

$$\sigma = 0;\ \{q, p\} \in \mathcal{M}. \tag{7}$$

Введение в теорию потенциала ускорений приводит к очередному сужению энтропийного многообразия – многообразию потенциала ускорений

$$\mathcal{П} = \left\{ q, p \mid \mathcal{П} \subset \mathcal{M};\ \Theta;\ \xi = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{8}$$

Здесь:

Θ – потенциал ускорений, $\xi = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$ – кососимметрическая матрица метрики (метрика), E – единичная диагональная матрица.

Как известно [7], на многообразии потенциала ускорений справедливы канонические уравнения потенциала ускорений

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial \Theta}{\partial p};\ \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \Theta}{\partial q};\ \{q, p\} \in \mathcal{П}. \tag{9}$$

Одно из центральных мест занимает сужение многообразия потенциала ускорений, содержащее потенциал импульса.

Подмногообразие многообразия потенциала ускорений, содержащее потенциал импульса, носит название Гильбертова поля.

Гильбертово поле имеет вид:

$$\mathcal{Г} = \{q, p \mid \mathcal{Г} \subset \mathcal{П}; \Psi\}. \tag{10}$$

На Гильбертовом поле

$$p = \mathrm{grad}\,\Psi\ ;\ \Psi = \Psi(q\ ,\ t)$$

и справедливо уравнение потенциала ускорений [7], [12]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Theta\ ;\ \{q\ ,\ p\} \subset \mathcal{T}. \tag{11}$$

III. Фундаментальную роль в развиваемой начатой в статье [11] теории играет вторая симметрия – двойственность представления импульса:

$$p = \begin{cases} p \in \Omega_p. \\ p(q,t)\ ;\ q \in \Omega_q\ ;\ t \in [0,T]. \end{cases} \tag{12}$$

Первая компонента этой двойственности определяет свободный импульс, а вторая компонента – присоединённый импульс. Присоединённый импульс реализуется в случае диффеоморфизма

$$T_s:\ \ \Omega_q \to \Omega_p.\ p(q\ ,\ t) \in C^{\infty}(\Omega_q^T)\ ;\ \Omega_q^T = \Omega_q \times (0,T).$$

В двойственности (12) T – время разрушения ламинарного потока.

Дополнительно к двум, приведённым выше симметриям, введем ещё одну симметрию. Здесь существует также симметрия двойственности представления обобщённой координаты:

$$q = \begin{cases} q \in \Omega_q. \\ q(t);\ \ t \in [0,T]. \end{cases} \tag{13}$$

Первая компонента этой двойственности соответствует эйлерову описанию, а вторая – лагранжевому.

Следствием симметрии (12) является ещё одна фундаментальная симметрия: двойственность представления расширенного вектора скорости:

$$\left[\frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t}\right] = \begin{cases} \left[\frac{dq}{dt}, \frac{dp}{dt}\right]; p \in \Omega_p. \\ \left[\frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t}\right]; p \in p(q,t); \frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t}; \frac{dp}{dt} \neq \frac{\partial p}{\partial t}. \end{cases} \tag{14}$$

IV. Для дальнейшего нам потребуются основные сведения по феноменологии гидродинамики:

1. *В сплошной среде вязкой несжимаемой жидкости существуют две сущности:*
   1). *Гидродинамические поля.*
   2). *Гидродинамические потоки.*
2. *Гидродинамические потоки расположены на энтропийных многообразиях.*
3. *Существуют два типа гидродинамических полей:*

1). Вихревые поля.

2). Потенциальные поля.

4. *Существуют два вида гидродинамических потоков:*

1). Ламинарные потоки.

2). Турбулентные потоки.

5. *Турбулентность – вид хаоса.*

6. *Ламинарностные потоки обладают большей гладкостью (регулярностью) и реализуются на вещественных геометрических объектах – энтропийных многообразиях.*

Опираясь на теорему разложимости Гельмгольца [13] и следуя работе [11], ламинарный поток на энтропийном многообразии примем в виде:

$$\dot{q} \triangleq u \, ; \, u \triangleq p + \omega \, ; \, \operatorname{div} u = 0 \, ; q \in Э_q \, ; \, t = [0,T]$$
$$\omega = \omega\,(q,t) \, ; \, q \in Э_q \, ; \, \omega \triangleq \operatorname{rot} B \, ; \, B \in C^{\infty}(\Omega_q^T).$$
$$p = \begin{cases} p \in \Omega_{p.} \\ p(q,t)\, ; \, q \in Э_q ; \;\; t \in [0,T]. \end{cases} \tag{15}$$
$$p = p(q\,,\,t): \;\; p = \operatorname{grad} \Psi \, ; \, \Psi = \Psi(q\,,\,t); \, \Psi \in C^{\infty}(\Omega_q^T) \, ;$$
$$T_Э: \; Э_q \to Э_p \, .$$

В ламинарном потоке (15) ключевую роль играет введённая в работе [11] гипотеза независимости: *вихрь не зависит от импульса*

$$\omega = \omega\,(q,t) \, ; \, \{q, p,t\} \in \Omega_T \, ; \, \Omega_T = \Omega \times (0,T).$$

V. Обращаясь к книге [8], я введу в рассмотрение Гельмгольцеву матрицу:

$$\Lambda = \chi + \mu + \tilde{\Omega}, \tag{16}$$
$$\chi = \begin{Vmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{Vmatrix}; \quad \mu = \begin{Vmatrix} 0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & 0 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \tilde{\Omega} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь: Λ — матрица плотности импульса; χ — матрица расширения; μ — матрица сдвига; $\tilde{\Omega}$ –матрица ротора.

В терминах Гельмгольцевой матрицы уравнение ламинарного потока (15) примет вид:

$$\dot{q} \triangleq \Lambda q \, ; \, q \in Э_q \, ; \, t \in [0,T]. \tag{17}$$

Теперь я введу основную гипотезу: *на вещественном энтропийном многообразии ламинарный поток* (17) допускает *нормальное представление*:

$$\dot{q} \triangleq \tilde{\Lambda}\, q; \, q \in Э_q \, ; \, t \in [0,T]. \tag{18}$$
$$\tilde{\Lambda} = \operatorname{Re} \tilde{\Lambda} \, ; \, \tilde{\Lambda} = \operatorname{diag} \{\lambda_1 \, , \lambda_2 \, , \lambda_3 \}.$$

Отсюда следует характеризация ламинарного потока: диагональная матрица $\tilde{\Lambda}$ задана над полем вещественных чисел.

Напомню, что матрица $\tilde{\Lambda}$ имеет двойственное представление

$$\tilde{\Lambda} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}\ (q,t),\ \ q \in Э_q. \\ \tilde{\Lambda}\ (t). \end{cases} \tag{19}$$

В свою очередь, матрицы $\{\chi,\ \mu,\ \tilde{\Omega}\}$ также имеют двойственное представление вида (19).

В другой формулировке для ламинарного потока обобщенная координата – вектор–функция $q = q\ (t)$ на отрезке $[0,\ T]$ - задана над полем вещественных чисел.

VI. Принятый сценарий перехода ламинарного потока в турбулентный имеет вид: причиной возникновения турбулентного потока является прекращение существования (разрушение) ламинарного потока. В момент времени T происходит разрушение одной структуры (ламинарного потока), а в последующие моменты времени, близкие к времени T, происходит возникновение новой структуры (турбулентного потока).

В хаотической механике энтропийное многообразие, на котором происходит событие – разрушение либо возникновение структуры - называется экстремальным пограничным слоем (ЭПС). Теория экстремального пограничного слоя содержится в книге [8].

Фундаментальным свойством ЭПС является то, что он имеет малую протяженность по шкале вещественного времени σJ. В связи с этим я событие – переход ламинарного потока в турбулентный - буду для определенности изучать на малом отрезке $[-\sqrt{\varepsilon} \div \sqrt{\varepsilon}] : (T-t) \in [-\sqrt{\varepsilon} \div \sqrt{\varepsilon}]$. Замечу, что событие и сопровождающий его хаос в ЭПС имеет адекватное описание в терминах известной теории предельной корректности [14]. По сути, ЭПС – это многообразие локальной предельной некорректности.

Определение 1. *Если* t *– текущее время,* T *– время разрушения ламинарного потока, то ламинарным потоком называется гладкая вектор–функция* $\{q=q\ (t'),\ t'=T-t\}$ *на отрезке* $[\varepsilon \div T]$ *– обобщенная координата, определенная над полем вещественных чисел.*

Определение 2. *Если* t *– текущее время,* T *– время разрушения ламинарного потока,* T_1 *– характерное время* $(T_1 > T)$*, то турбулентным потоком называется вектор функция* $\{q = (t'),\ t' = T - t\}$ *на отрезке* $[-\varepsilon \div (T - T_1)]$ *– обобщенная координата, определенная над полем комплексных чисел.*

Определение 3. *Переход ламинарного потока в турбулентный это трансформация гладкой вещественной вектор-функции* $\{q=q(t');\ q=\mathrm{Re}q;\ t'=T-t\}$ *на отрезке* $[\varepsilon \div T]$ *– обобщенной координаты - в комплексную вектор-функцию* $\{q = q(t'):\ I_m\, q \neq 0\}$ *на отрезке* $[-\varepsilon \div (T-T_1)]$ *при* $T_1 > T$.

В ЭПС переход ламинарного пограничного слоя описывается негладкой вектор–функцией q(t') на отрезке $[-\sqrt{\varepsilon} \div \sqrt{\varepsilon}]$. В свою очередь, ЭПС будет иметь вид:

$$Э_q^- = \{q \mid q = q(t'), t' \in [-\sqrt{\varepsilon} \div \sqrt{\varepsilon}]; \|\dot{q}\| \gg \|q\|, q \in R^3; \forall t' \in [\sqrt{\varepsilon} \div \varepsilon]; q \in \mathbb{C}^3; \forall t' \in [-\varepsilon \div -\sqrt{\varepsilon}]\}. \tag{20}$$

Введем достаточно ясную гипотезу о нормальности потока в ЭПС; в условиях применимости этой гипотезы уравнение нормального потока будет:

$$\dot{q} = \tilde{\Lambda} q; q \in Э_q^-; t' \in [-\sqrt{\varepsilon} \div \sqrt{\varepsilon}]; t' = T - t. \tag{21}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$q = q_0 e^{\phi}; \phi \triangleq \int^{t'} \tilde{\Lambda} dt; t' \in [-\sqrt{\varepsilon} \div \sqrt{\varepsilon}]; t' = T - t. \quad (22)$$

Переход ламинарного потока в турбулентный существует, если существует негладкая вектор – функция на отрезке $[-\sqrt{\varepsilon} \div \sqrt{\varepsilon}]$; $t' \in [-\sqrt{\varepsilon} \div \sqrt{\varepsilon}]$; $t' = T - t$, обладающая двойственным представлением

$$\phi = \begin{cases} \mathrm{Re}\ \phi\,; \ \ \forall t' > 0. \\ \mathrm{Re}\ \phi + i\,\mathrm{Im}\ \phi\ ; \ \ \mathrm{Im}\ \phi \neq 0\,; \ \forall t' < 0. \end{cases} \quad (23)$$

В хаотической механике [8] существует также и другая двойственность:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}_{\nu}\,; \ \forall\ t' > 0. \\ \tilde{\Lambda}_{\nu} + i\,\tilde{\Lambda}_{\omega}\ ; \ \forall t' < 0. \end{cases} \quad (24)$$

Эта двойственность в ряде случаев более удобна, поскольку она проблему возникновения турбулентности сводит к проблеме собственных значений. Уравнение потока в ЭПС имеет двойственное представление:

$$\dot{q} = \begin{cases} \Lambda\, q\,; \ q \in Э_q^{-}. \\ \tilde{\Lambda}\, q\,. \end{cases} \quad (25)$$

Из этой двойственности следует уравнение:

$$\Lambda\, q = \tilde{\Lambda}\, q \ ; \qquad \Lambda = \chi + \mu + \tilde{\Omega}\ ; \ \ q \in Э_q^{-}\,. \quad (26)$$

Как известно, в этом уравнении диагональная матрица $\tilde{\Lambda}$ есть матрица собственных значений матрицы Гельмгольца. Здесь мы и приходим к известному факту [8]:

1. $\tilde{\Lambda} = \Lambda_\nu$ – ламинарный поток.
2. $\tilde{\Lambda} = \Lambda_\nu + i\,\Lambda_\omega$ – турбулентный поток.

VII. Структура потока в ЭПС устанавливается на основе анализа элементарных функций. Ряд элементарных функций для отрицательных значений аргумента над полем вещественных чисел не существуют. Среди них есть две характерные функции:

1. $\tau = \sqrt{t'}$ – первая характерная функция.
2. $\ln t'$ – вторая характерная функция.

Для отрицательных значений аргумента над полем комплексных чисел характерные функции имеют вид:

1. $\tau = i\sqrt{|t'|}\,; \quad t' < 0.$
2. $\ln t' = \pi i + \ln |t'|; \ t' < 0.$

Как функции на отрезке $[-\sqrt{\varepsilon} \div \sqrt{\varepsilon}]$, характерные функции являются негладкими функциями, имеющими двойственные представления:

$$1.\ \tau = \begin{cases} \sqrt{t'}\,; \ \forall\ t' > 0. \\ i\sqrt{|\,t'\,|}\,; \ \forall t' < 0. \end{cases} \quad (27)$$

$$2.\ \ln t' = \begin{cases} \ln t' \ ;\ \forall\ t' > 0. \\ \pi i + \ln|t'| \ ;\ \forall t' < 0. \end{cases}$$

Приведенные сведения о характерных элементарных функциях дают основания для выбора в ЭПС нового аргумента (параметра параметризации) $\tau = \sqrt{(T - t)}$.

В этом случае матрица плотности импульса будет иметь двойственное представление

$$\Lambda = \begin{cases} \Lambda(q, \tau), \quad q \in Э_q. \\ \Lambda(\tau). \end{cases} \tag{28}$$

Теперь я наделю матрицу плотности импульса симметрией – форминвариантностью. Форминвариантность матрицы плотности импульса означает, что матрица–функция Λ имеет единый вид (структуру) для обеих компонент двойственности времени:

$$\tau = \begin{cases} \sqrt{T - t} \ ;\ \forall (T - t) > 0. \\ i\sqrt{|T - t|} \ ;\ \forall (T - t) < 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Если существует симметрия – форминвариантность Гельмгольцевой матрицы плотности импульса, то уравнения Навье – Стокса*

$$\frac{Du}{Dt} = -\operatorname{grad}\Pi + \nu\Delta u + f;\ q \in Э_q \tag{29}$$

обладают симметрией – сохраняют структуру для обеих компонент двойственности времени:

$$\tau = \begin{cases} \sqrt{T - t} \ ;\ \forall (T - t) > 0. \\ i\sqrt{|T - t|} \ ;\ \forall (T - t) < 0. \end{cases} \tag{30}$$

При этом выделение видов потоков происходит путем конкретизации времени τ *и задания структуры энтропийного многообразия конфигурационного пространства.*

В результате уравнения потоков имеют вид:

1.Ламинарный поток

$$\begin{aligned} &\frac{dq}{d\tau} = \Lambda_\tau q;\ \Lambda_\tau = -2\tau\Lambda;\ q \in Э_q, \\ &\left(\frac{1}{2\tau}\frac{d\Lambda}{d\tau} - \Lambda^2\right) q = -\operatorname{grad}\Pi + \nu\Delta u + f;\ q \in Э_q, \\ &\operatorname{div}\Lambda q = 0;\ \Lambda = \chi + \mu + \tilde{\Omega}\ ; \\ &Э_q = \{q |\ Э_q \subset \Omega_q;\ \Omega_q \subset R^3\};\ \tau = \sqrt{(T - t)}\ ;\ t \in (0 \div T). \end{aligned} \tag{31}$$

$$\chi = \begin{Vmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{Vmatrix}; \quad \mu = \begin{Vmatrix} 0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & 0 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \tilde{\Omega} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

3. *Турбулентный поток*
4.

$$\frac{dq}{d\tau} = \Lambda_\tau q; \;\; \Lambda_\tau = -\,2\tau\,\Lambda; \; q \in Э_q,$$
$$\left(\frac{1}{2\tau}\frac{d\Lambda}{dt} - \Lambda^2\right)q \;=\; -\,q\mathrm{rad}\,\Pi \;+ \nu\Delta u + f; \; q \in \;Э_q, \tag{32}$$
$$\mathrm{div}\,\Lambda q = 0; \; \Lambda = \chi + \mu + \;\tilde{\Omega}\;;$$
$$Э_q = \{q |\, Э_q \subset \Omega_q; \Omega_q \subset \mathbb{C}^3\}; \tau = i\sqrt{|\,T - t\,|}\,; \;\forall\; (T - t) < 0,$$

$$\chi = \begin{Vmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{Vmatrix}; \quad \mu = \begin{Vmatrix} 0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & 0 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \tilde{\Omega} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Доказательство. В случае Гельмгольцевой матрицы плотности импульса

$$\Lambda = \chi + \mu + \;\tilde{\Omega}\,,$$

обладающей форминвариантностью относительно времени τ, этой же симметрией будет обладать и уравнение потока

$$\dot{q} = \Lambda q\; ; \; q \in Э_q. \tag{33}$$

В свою очередь уравнение потока скорости будет:

$$\ddot{q} = (\,\dot{\Lambda} + \Lambda^2)\; q\; ; \; q \in Э_q\,. \tag{34}$$

Ясно, что и это уравнение будет обладать форминвариантностью относительно времени τ .

Поскольку $\dot{q} \; = u; \; \ddot{q} = \dfrac{Du}{Dt}$, то уравнение Навье – Стокса и уравнение (34) приводят к двойственности

$$\ddot{q} = \begin{cases} (\dot{\Lambda} + \Lambda^2)\; q\;, \;\; q \in Э_q. \\ -\mathrm{grad}\;\; \Pi + \nu\;\Delta\;\Lambda\;q + f. \end{cases} \tag{35}$$

Эта двойственность приводит к новому виду уравнений Навье – Стокса

$$(\,\dot{\Lambda} + \Lambda^2)q = -\,\mathrm{grad}\,\Pi \;+ \nu\Delta u + f; \tag{36}$$
$$\Lambda = \chi + \mu + \;\tilde{\Omega}, \; q \in Э_q.$$

Поскольку $\dot{\Lambda} = \left(-\dfrac{1}{2\tau}\dfrac{d\Lambda}{d\tau}\right)$, то в случае форминвариантности матрицы плотности импульса симметрией структуры будет обладать и уравнение (36) .

Примем теперь следующую характеризацию потоков:

1. Ламинарный поток

$$\tau = \sqrt{T - t}\ ;\ \forall (T - t) > 0\ ;$$
$$Э_q = \{q|\ Э_q \subset \Omega_q;\ \Omega_q \subset R^3\}. \qquad (37)$$

2. Турбулентный поток

$$\tau = i\sqrt{|T - t|}\ ;\ \forall (T - t) < 0\ ;$$
$$Э_q = \{q|\ Э_q \subset \Omega_q;\ \Omega_q \subset \mathbb{C}^3\}. \qquad (38)$$

Здесь: R^3– трехмерное евклидово пространство;

$\mathbb{C}^3$ – комплексное трехмерное евклидово пространство.

Внося эти характеризации в уравнение (36) и присоединяя к ним уравнения неразрывности и потока (33), мы и приходим к уравнениям ламинарного и турбулентного потоков теоремы.■

VIII. Уравнению нормального потока двойственности (25) можно придать вид:

$$\frac{d \ln q}{d\tau} = \tilde{\Lambda}_\tau;\ \tilde{\Lambda}_\tau = -2\tau\tilde{\Lambda}\ ;\ q \in Э_q. \qquad (39)$$

Теперь, следуя книге [7] из уравнения (39), получаем уравнение структурной энтропии

$$\frac{dH_q}{d\tau} = \sigma_\tau;\ H_q = (\ln q|E)_{R3};\ \sigma_\tau = \mathrm{Sp}\,\tilde{\Lambda}_\tau;\ q \in Э_q. \qquad (40)$$

В этом уравнении H_q – структурная энтропия, а $\sigma_\tau = \sigma_\tau(\tau)$ – дивергентный инвариант.

Уравнение (40) формирует многообразие

$$V_q = \{q|\ V_q \subset Э_q;\ \Pi q = f_\tau;\ \Pi q = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3\}\ . \qquad (41)$$

На многообразии V_q, $f_\tau = f_\tau(\tau)$ - гладкая функция на отрезке $[\sqrt{\varepsilon} \div \sqrt{T}]$, $\forall(T - t) > 0$

$$f_\tau = \Pi_o + e^{\int^{\tau} \sigma_\tau\, d\tau}.$$

Теорема 2. *На вещественном многообразии*

$$V_q = \{q|\ V_q \subset Э_q;\ \Pi q = f_\tau;\ \Pi q = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3\}$$

уравнение

$$\Lambda_\tau q = \tilde{\Lambda}_\tau q \qquad (42)$$

для квадратной матрицы [3x3] *вида*:

$$\Lambda_\tau = \Lambda^0_\tau + \Lambda^\nu_\tau + \Lambda^\omega_\tau$$

$$\Lambda^0_\tau = \begin{Vmatrix} \lambda^0_{\tau 1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^0_{\tau 2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^0_{\tau 2} \end{Vmatrix}; \quad \Lambda^\nu_\tau = \begin{Vmatrix} 0 & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{12} & 0 & \nu_{23} \\ \nu_{13} & \nu_{23} & 0 \end{Vmatrix}; \quad \Lambda^\omega_\tau = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{Vmatrix}$$

и $\tilde{\Lambda}_\tau = \mathrm{diag}\{\lambda^1_\tau, \lambda^2_\tau, \lambda^3_\tau\}$

преобразуется к системе алгебраических уравнений:

$$\lambda^0_{\tau 1} + (\nu_{12} + \omega_{12}) \frac{q_2^2 q_3}{\Pi q} + (\nu_{13} + \omega_{13}) \frac{q_2 q_3^2}{\Pi q} = \lambda^1_\tau . \tag{43}$$

$$\lambda^0_{\tau 2} + (\nu_{12} - \omega_{12}) \frac{q_1^2 q_3}{\Pi q} + (\nu_{23} + \omega_{23}) \frac{q_1 q_3^2}{\Pi q} = \lambda^2_\tau .$$

$$\lambda^0_{\tau 3} + (\nu_{13} - \omega_{13}) \frac{q_1^2 q_3}{\Pi q} + (\nu_{23} - \omega_{23}) \frac{q_1 q_3^2}{\Pi q} = \lambda^3_\tau .$$

представимой также в другой форме:

$$a_1 q_2^2 + b_1 q_2 + c_1 = 0;$$
$$a_2 q_3^2 + b_2 q_3 + c_2 = 0;$$
$$a_3 q_1^2 + b_3 q_1 + c_3 = 0$$

$$a_1 = (\nu_{12} + \omega_{12}) \frac{q_3}{\Pi q}; b_1 = (\nu_{13} + \omega_{13}) \frac{q_3^2}{\Pi q}; \ c_1 = \lambda^0_{\tau 1} - \lambda^1_\tau$$

$$a_2 = (\nu_{23} + \omega_{23}) \frac{q_1}{\Pi q}; b_2 = (\nu_{12} - \omega_{12}) \frac{q_1^2}{\Pi q}; \ c_2 = \lambda^0_{\tau 2} - \lambda^2_\tau \tag{44}$$

$$a_3 = (\nu_{13} - \omega_{13}) \frac{q_2}{\Pi q}; b_3 = (\nu_{23} - \omega_{23}) \frac{q_2^2}{\Pi q}; \ c_1 = \lambda^0_{\tau 2} - \lambda^1_\tau$$

В свою очередь, система (44) преобразуется в систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$q_1 = \frac{-b_3 \pm \sqrt{b_3^2 - 4a_3 c_3}}{2a_3}; \quad q_2 = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1}}{2a_1}; \quad q_3 = \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_2 c_2}}{2a_2}. \tag{45}$$

допускающую при дополнительном условии единственности представления, реализованном с помощью уравнений связи

$$b_1^2 = 4a_1 c_1; \quad b_2^2 = 4a_2 c_2; \quad b_3^2 = 4a_3 c_3. \tag{46}$$

решение:

$$q_1 = -\frac{1}{2}\frac{(\nu_{23} - \omega_{23})}{(\nu_{13} - \omega_{13})} q_2 \, ; q_2 = -\frac{1}{2}\frac{(\nu_{13} + \omega_{13})}{(\nu_{12} + \omega_{12})} q_3 \, ; q_3 = -\frac{1}{2}\frac{(\nu_{12} - \omega_{12})}{(\nu_{23} + \omega_{23})} q_1 \tag{47}$$,

обладающее симметрией

$$\left(\frac{\nu_{23} - \omega_{23}}{\nu_{13} - \omega_{13}}\right) \cdot \left(\frac{\nu_{13} + \omega_{13}}{\nu_{12} + \omega_{13}}\right) \cdot \left(\frac{\nu_{12} - \omega_{12}}{\nu_{23} + \omega_{23}}\right) = -8 \tag{48}$$

Лемма 1. *Симметрия, определяемая уравнением теоремы* 2

$$\left(\frac{\nu_{23}-\omega_{23}}{\nu_{13}-\omega_{13}}\right)\cdot\left(\frac{\nu_{13}+\omega_{13}}{\nu_{12}+\omega_{13}}\right)\cdot\left(\frac{\nu_{12}-\omega_{12}}{\nu_{23}+\omega_{23}}\right)=-8$$

существует при $\nu_{kj} \neq 0$, $\omega_{kj} \neq 0$, $\kappa = 1,2$; $j = 2,3$: $\kappa \neq j$.

Обсуждение. Фундаментальный результат леммы 1, ассоциирующейся с теоремой разделимости работы [11], имеет важное значение в теории уравнений Навье – Стокса и турбулентности. Его семантика следующая: в локальной зоне разрушения (ЭПС) ламинарный поток содержит потенциальные и вихревые компоненты; возникновение новой структуры – турбулентного потока - является результатом взаимодействия двух сущностей – диссипации и вихря.

IX. Для нормального потока в ЭПС (21) уравнения гидродинамики можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &q = \tilde{\Lambda}q; q \in Э_q^- : t' \in [-\sqrt{\varepsilon} \div \sqrt{\varepsilon}]; t' = T - t. \\ &(\dot{\tilde{\Lambda}} + \tilde{\Lambda}^2)q = \varphi; \varphi = -\mathrm{grad}\, \Pi + \nu\Delta\tilde{\Lambda}q + f; \\ &\mathrm{div}\tilde{\Lambda}q = 0; \tilde{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}. \end{aligned} \tag{49}$$

В проблеме перехода наибольший интерес представляют два случая:

$$1.\ |\dot{\lambda}_j| \sim |\lambda_j^2|; \qquad 2.\ |\dot{\lambda}_j| \gg |\lambda_j^2|.$$

Первый случай подробно изучен в книге [8]; здесь я начну изучение второго случая. В этом случае в ЭПС будут справедливы приближенные уравнения

$$\dot{\tilde{\Lambda}}q = -\,\mathrm{qrad}\,\Pi + \nu\Delta\ \tilde{\Lambda}q + f;\ q \in Э_q^-. \tag{50}$$

Характерным решением, удовлетворяющим неравенству 2. будет решение:

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_0 \ln\tau; \tau = \sqrt{T - t} \tag{51}$$

Определяемая этим решением обобщения координата определяется формулой:

$$q = q_0 e^{-\tilde{\Lambda}_0 \tau^2 (\ln\tau - 1/2)} \tag{52}$$

Отмечу одну интересную деталь: решение (52) удовлетворяет начальным данным, заданным при t = T. Это является следствием симметрии ЭПС – локальной инвариантности. Возникающие при пересечении ядра ЭПС скачки имеют значения:

$$1.\ [q] = 0. \qquad 2.\ [\dot{q}] = \frac{q_0\tilde{\Lambda}_0\pi}{2}i.$$

Таким образом, в изученном примере при изменении структуры потока обобщенная координата остается непрерывной, а ее производная имеет скачок.

Из формулы (52) следует двойственность, описывающая ламинарную и турбулентную ветви потока:

$$q = \begin{cases} q_0 e^{-\tilde{\Lambda}_0 (T-t)(\ln\sqrt{T-t}-\frac{1}{2})}; \forall (T-t) > 0 \\ q_0 e^{\tilde{\Lambda}_0 |T-t|(\ln\sqrt{|T-t|}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2} i)}; \forall (T-t) < 0. \end{cases}$$

Обращу внимание на то, что решение (47) обладает большой общностью: оно описывает представительный набор аттракторов ламинарного потока, порождающих разнообразные виды турбулентных потоков.

В заключение приведу следующее суждение: на глубинном уровне феноменология турбулентности в комплексных пространствах опирается на происходящий в текущий период времени переход от механики материальной точки к механике ориентированной материальной точки [10].

Литература.

[1]. Leray J., 1934. Essai sur le mouvemtnt d'un liquide visquenx emplissant l' espace? Acta Matematica 63, 193–248.

[2]. Temam R., 1979. Navier Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis –North – Holland.

[3]. Ladizhenskaya O., 1969. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows, Cordon and Breach.

[4]. Ладыженская О.И., 2003. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье – Стокса, существование и гладкость // УМН. т. 58. №2. с 45–78.

[5]. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т., 2004. Аппроксимационно–топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье – Стокса. – М. Едиториал УРСС.

[6]. Constantin P., 2001. Some open problems and research directions in mathematical study of fluid dynamics, in Mathematics Unlimited: 2001 and Beyond, eds. Bjorn Engquist and Wilfried Schmid Springer–Verlag, Berlin.

[7]. Панченков А.Н., 1999. Энтропия. Издательство общества " Интелсервис ", Нижний Новгород.

[8]. Панченков А.Н., 2002. Энтропия–2: Хаотическая механика. Издательство общества " Интелсервис", Нижний Новгород.

[9]. Панченков А.Н., 2004. Инерция. Издательство ГУП "МПИК" Йошкар–Ола.

[10]. Панченков А.Н., 2005. Энтропийная механика. Издательство ГУП "МПИК" Йошкар–Ола.

[11]. Panchenkov A.N., and Matveev K.I., 2005. General–Entropy Analysis of Navier–Stokes Equations. Far East Journal of Applied Mathematics, 21(1), pp.17-30.

[12]. Панченков А.Н., 1975. Теория потенциала ускорений. Новосибирск: Наука.

[13]. Helmholtz H., 1858. Uber Integrale hidrodinamischen Glechungtn weiche den Wirbelbewegun–gen entsprechen.I.rein.angew.Vath. v. 55s. 25–55.

[14]. Панченков А.Н., 1976. Основы теории предельной корректности. Издательство "Наука", М.